ÖFVER

DIOPHANTISKA EKVATIONEN

$$x^n + y^n = z^n$$

AKADEMISK AFHANDLING

AF

T. R. BENDZ

UPSALA 1901
ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

11555.

ÖFVER

DIOPHANTISKA EKVATIONEN

$$x^n + y^n = z^n$$

AKADEMISK AFHANDLING

SOM MED TILLSTÅND AF

VIDTBERÖMDA FILOSOFISKA FAKULTETENS I UPSALA

MATEMATISKT-NATURVETENSKAPLIGA SEKTION

FÖR VINNANDE AF FILOSOFIE DOKTORSGRAD

TILL OFFENTLIG GRANSKNING FRAMSTÄLLES

Å LÄROSALEN N:o XI

LÖRDAGEN DEN 30 MARS 1901 KL. 10 F. M.

AF

TORSTEN RAGNAR BENDZ

FILOSOFIE LICENTIAT AF VESTGÖTA NATION

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

UPSALA 1901

ALMQVIST & WIKSELLS BOKTRYCKERI-A.-B.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548928_0055

Inledning.

I Geschichte der Mathematik Band II p. 702—712 skrifver M. Cantor: Wir wollen nun einige der Fermat'schen Sätze in der Reihenfolge, in welcher sie in der Diophantausgabe von 1670 erschienen, angeben.

1. "Es ist ganz unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein irgend eine Potenz ausser dem Quadrate in zwei Potenzen von demselben Exponenten zu zerfällen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, aber der Rand ist zu schmal ihn zu fassen". Dieser Satz, welchem seine zufällige Stellung als Randnote den ersten Platz in unserem Berichte anweist, ist zugleich der berühmteste von allen, welche die Wissenschaft Fermat verdankt. Wie es sich mit jenem wirklichen oder vermeintlichen Beweise Fermats verhielt, gehört zu den unlösbaren Räthseln. Nur sehr allmälig ist es verschiedenen hervorragenden Zahlentheoretikern gelungen, die Wahrheit des Satzes festzustellen. Sie benutzten dazu Beweismittel, welche Fermat zuverlässig nicht in seiner Gewalt hatte. Vid genomläsandet häraf beslöt jag söka utan någon kännedom om talteori finna bevis för denna sats. Fördenskull uppställde jag efter Fermat problemet att visa, att det ej existerar någon rätvinklig triangel, hvars sidor äro hela tal, och hvars yta är kvadraten på ett helt tal. Redan Campanus * hade funnit metoden härför,

* Cantor l. c.

då han visade irrationaliteten hos gyllene snittet, och BACHET* hade uppställt problemet att bestämma sidorna i en rätvinklig triangel, så att de blefvo hela tal, och så att ytan blef ett förut uppgifvet helt tal. FERMAT har då visat, att, om det gifves någon rätvinklig triangel sådan, att dess sidor äro hela tal och dess yta en jämn kvadrat, så finnes alltid en annan triangel med samma egenskaper men med mindre sidor. Det skulle således gifvas oändligt många mindre trianglar, hvilket är omöjligt. Första paragrafen omfattar denna undersökning. Tyvärr har jag sedan undersökt problemet att visa, att det ej finnes tre hela tal x, y och z, hvilka satisfiera likheten $x^n + y^n = z^n$, där n är helt tal större än z, i stället för att uppställa problemen i den ordning, som FERMAT själf angifver i Rélation des découvertes en la science des nombres*. Under undersökningens gång har jag emellertid dels erhållit kännedom om några talteoretiska satser, dels kommit att förskjuta frågan. Afhandlingens ändamål kan jag således precisera såsom ett försök att öppna frågan för vidare studier.

* CANTOR l. c.

§ 1.

Ekvationen $x^4 + 4y^4 = z^2$.

Teorem: Det gifves ingen rätvinklig triangel, hvars sidor äro hela tal, och hvars yta är kvadraten på helt tal.

Ty antag, att det finnes en sådan triangel och kalla sidorna, emedan ytan eller deras halfva produkt är ett helt tal, a, $2b$ och z, där z är hypotenusan. Kan jag då visa, att det städse existerar en annan triangel med samma egenskaper men med mindre yta, så måste det finnas oändligt många mindre heltalsytor, hvilket är omöjligt. Satsen är i sådant fall bevisad.

α) Antag då först att a och b ha gemensamma faktorer. I sådant fall ha äfven $z = \sqrt{a^2 + 4b^2}$ och (ytan) $\sqrt{ab}$ dessa faktorer, hvadan alltså en till ytan mindre tviangel med samma egenskaper existerar.

β) Antag nu att a och b ej ha gemensama faktorer. Emedan då ab är kvadraten på ett helt tal, så måste a och b vara kvadrater på hela tal och således

$$a = x^2$$
$$b = y^2 .$$

Emedan z är hypotenusan, måste äfven

$$z^2 = x^4 + 4y^4 .$$

1) Antag då z jämn och $= 2z_1$. Då är äfven x^4 jämn, således äfven $x = 2x_1$, hvaremot y är udda

$$\because 4z_1^2 = 16x_1^4 + 4y^4$$

eller

$$z_1^2 = 4x_1^4 + y^4 .$$

Om man då uppritar den triangel, hvars sidor äro y^2, x_1^2 och z_1, så får denna till yta kvadraten på hela talet $x_1 y$ och har således mindre yta än den ursprungliga.

2) Antag slutligen z udda. z och y kunna då ej hafva någon gemensam faktor, ty denna skulle då ingå i x^4. Då x och y ej ha några gemensamma faktorer, kan emellertid x^4 ej ha någon faktor gemensam med y, hvarför z och y ej ha några gemensamma faktorer. På samma sätt inses, att ej heller z och x ha några gemensamma faktorer. Emedan z är udda är x^4 och således äfven x udda. Skrifves då ekvationen på formen

$$y^4 = \frac{z^2 - x^4}{4}$$

så fås

$$y^4 = \frac{z - x^2}{2} \frac{z + x^2}{2} .$$

Emedan z och x äro udda, så äro talen $\frac{z - x^2}{2}$ och $\frac{z + x^2}{2}$ hela. De kunna dessutom ej hafva några gemensamma faktorer, ty kalla dessa för λ så blir:

$$\frac{z - x^2}{2} = \lambda\alpha$$

$$\frac{z + x^2}{2} = \lambda\beta ,$$

där α och β äro hela tal. Härur fås:

$$z = \lambda(\alpha + \beta)$$

$$x^2 = \lambda(\beta - \alpha) .$$

z och x^2 skulle således ha faktorn λ gemensam, hvilket strider mot antagandet. Således måste:

$$\left.\begin{aligned} \frac{z - x^2}{2} &= \eta^4 \\ \frac{z + x^2}{2} &= \eta_1{}^4 \\ y &= \eta\eta_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Skrifver man nu ekvationen på formen

$$\begin{aligned} x^4 &= z^2 - 4y^4 \\ &= (z - 2y^2)(z + 2y^2) \end{aligned}$$

så fås

$$\left.\begin{aligned} z - 2y^2 &= \xi^4 \\ z + 2y^2 &= \xi_1{}^4 \\ x &= \xi\xi_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Ur ekv. (I) fås:

$$x^2 = \eta_1{}^4 - \eta^4 \quad \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Här måste η vara jämn. För att bevisa detta adderar jag de två första ekvationerna i (II), och subtraherar från bägge membra $2x^2$. Således blir:

$$\begin{aligned} 2(z - x^2) &= \xi^4 + \xi_1{}^4 - 2x^2 \\ &= \xi^4 + \xi_1{}^4 - 2\xi^2\xi_1{}^2 && \text{enligt (II)} \\ &= (\xi_1{}^2 - \xi^2)^2 \\ &= \{(\xi_1 + \xi)(\xi_1 - \xi)\}^2 \\ &= 4\eta^4. && \text{enligt (I)} \end{aligned}$$

Då x är udda måste ξ_1 och ξ vara udda och $\xi_1 + \xi$ samt $\xi_1 - \xi$ vara jämna. $\{(\xi_1 + \xi)(\xi_1 - \xi)\}^2$ har därför med säkerhet faktorn 16. Således måste η vara jämn och $= 2\eta_0$. Således blir (III):

$$x^2 = \eta_1{}^4 - 16\eta_0{}^4$$

eller

$$(2\eta_0)^2 = \frac{\eta_1{}^2 - x}{2}\,\frac{\eta_1{}^2 + x}{2} \quad \ldots\ldots \text{(IV)}$$

Men $\frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2}$ och $\frac{\eta_{i_1}^2 + x}{2}$ kunna ej hafva någon gemensam faktor, ty antag den vara λ_1 och således

$$\frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2} = \lambda_1 \alpha_1$$

$$\frac{\eta_{i_1} + x}{2} = \lambda_1 \beta_1 ,$$

där α_1 och β_1 äro hela tal. Härur fås:

$$\eta_{i_1}^2 = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1)$$
$$x = \lambda_1 (\beta_1 - \alpha_1) .$$

Men η_{i_1} är faktor i y, och x och y ha ej gemensamma faktorer. Af ekv. (IV) framgår då, att antingen $\frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2}$ eller $\frac{\eta_{i_1}^2 + x}{2}$ har faktorn 4. Antag då först $\frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2}$ ha faktorn 4. Då fås:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2} &= 4 q^4 \\ \frac{\eta_{i_1}^2 + x}{2} &= q_1^4 \\ \eta_{i_0} &= q q_1 \end{aligned}\right|$$

och härur

$$q_1^4 + 4 q^4 = \eta_{i_1}^2 .$$

I detta fall existerar således en annan triangel med samma egenskaper som den ursprungliga men med ytan $q_1^2 q^2$ eller $\eta_{i_0}^2$. Då η_{i_0} var faktor i y, så blir denna triangels yta mindre än den ursprungligas.

Antag nu att $\eta_{i_1}^2 + x$ har faktorn 4. Då fås:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta_{i_1}^2 + x}{2} &= 4 p^4 \\ \frac{\eta_{i_1}^2 - x}{2} &= p_1^4 \\ \eta_{i_0} &= p p_1 \end{aligned}\right|$$

och härur

$$4p^4 + p_1{}^4 = \eta^2 .$$

Således existerar äfven i detta fall en mindre triangel. Satsen är därför bevisad*.

§ 2.

Ekvationen $x^n + y^n = z^n$.

I denna paragraf kommer jag att studera ekvationen $x^n + y^n = z^n$ (n helt tal större än 2) med de i föregående paragraf vunna metoderna samt med hjälp af de allra mest elementära satserna i talteorien. Till en början behöfver n antagas endast vara primtal, ty om ekvationen

$$a^n + b^n = c^n$$

ej kan satisfieras med hela tal, så kan ej heller ekvationen:

$$(x^m)^n + (y^m)^n = (z^m)^n$$

satisfieras med hela tal.

Antag då n vara primtal, och att det gifves tre heltal x, y och z, som satisfiera ekvationen

$$x^n + y^n = z^n .$$

Man får då:

$$(x + y)(x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1}) = z^n .$$

Kalla här gemensamma faktorn till $x + y$ och $x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^n$ för λ, och sätt:

$$x + y = \lambda\alpha$$

$$x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1} = \lambda\beta ,$$

* Euler har först bevisat den. Se Legendre: Zahlentheorie. Deutsch von H. Maser Leipzig 1893. Bd II p. 1.

där α och β äro hela tal. Löses x ur den första ekvationen och insättes i den andra så fås:

$$\lambda\gamma + ny^{n-1} \equiv \lambda\beta ,$$

där γ är ett helt tal. Då x och y kunna antagas ej hafva några faktorer gemensamma, emedan sådana kunna bortförkortas ur den ursprungliga ekvationen, kunna ej heller λ och y hafva gemensam faktor. λ kan således möjligen vara talet n. Uttrycken $x + y$ och $x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1}$ kunna således endast hafva faktorn n^1 gemensam. Slår man uttrycket $z^n - x^n$ i faktorer, så erhåller man samma resultat i afseende på uttrycken $z - x$ och $z^{n-1} + zx^{n-2} + \cdots x^{n-1}$. Antag nu först att hvarken x, y eller z har faktorn n. Då blir:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \zeta^n \\ x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1} &= \zeta_1{}^n \\ z &= \zeta\zeta_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \text{(I)}$$

På samma sätt fås:

$$\left.\begin{aligned} z - x &= \eta^n \\ z^{n-1} + zx^{n-2} + \cdots + x^{n-1} &= \eta_1{}^n \\ y &= \eta\eta_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

och

$$\left.\begin{aligned} z - y &= \xi^n \\ z^{n-1} + zy^{n-2} + \cdots + y^{n-1} &= \xi_1{}^n \\ x &= \xi\xi_1 \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots \text{(III)}$$

Emedan enligt Fermats sats,

$$x^n \equiv x \pmod{n}$$

$$y^n \equiv y \pmod{n},$$

blir

$$x^n + y^n \equiv x + y \pmod{n}$$

och, då $x + y$ ej har faktorn n, så är (ekv. I):

$$\zeta_1{}^n \equiv 1 \pmod{n}.$$

Men enligt FERMAT's sats är:

$$\zeta_1^{\,n} \equiv \zeta_1 \pmod{n}$$
$$\because\ \zeta_1 \equiv 1 \pmod{n}$$
$$= 1 + kn$$
$$\because\ \zeta_1^{\,n} = 1^n + \frac{nkn}{1} 1^{n-1}$$
$$\equiv 1 \pmod{n^2}.$$

På samma sätt visas att

$$\xi_1^{\,n} - \eta_{11}^{\,n} \equiv 1 \pmod{n^2}$$

eller att

$$x^n + y^n \equiv x + y \pmod{n^2}$$
$$z^n - x^n \equiv z - x \quad ,,$$
$$z^n - y^n \equiv z - y \quad ,, \quad ,$$

hvaraf följer

$$x^n \equiv x \pmod{n^2}$$
$$y^n \equiv y \quad ,,$$
$$z^n \equiv z \quad ,, \quad .$$

Men

$$x^n = \xi^n \xi_1^{\,n}$$
$$\because x^n \equiv \xi^n \pmod{n^2}.$$

således fås

$$x \equiv \xi^n \pmod{n^2}$$

och på samma sätt

$$y \equiv \eta^n \pmod{n^2}$$
$$z \equiv \zeta^n \quad ,, \quad .$$

Inför man då kvantiteten

$$k = x + y - z^*$$
$$= \zeta^n - z$$
$$= x - \xi^n$$
$$= y - \eta^n$$

* Anm.:
$$(x+y)^n > x^n + y^n$$
$$> z^n$$
$$\because x + y > z$$
$$k > 0 \quad .$$

så inses, att k kommer att innehålla faktorerna ξ, η, ζ och n^2. Multipliceras de tre sista ekvationerna med z^n, x^n och y^n, så fås:

$$k(x^n + y^n - z^n) = z^n(z - \zeta^n) + x^n(x - \xi^n) + y^n(y - \eta^n)$$

eller

$$z^{n+1} + x^{n+1} + y^{n+1} = z^n\zeta^n + x^n\xi^n + y^n\eta^n .$$

Om man då frågar, huruvida algebraiska summan af tre n^{te} digniteter (n primtal > 2) någonsin kan vara lika med algebraiska summan af tre $(n+1)^{ste}$ digniteter, så måste detta jakande besvaras, ty

$$3^3 - 2^3 - 1^3 = 2^4 + 1^4 + 1^4 .$$

I hvilket samband k står till de öfriga kvantiteterna framgår äfven, om man löser de första ekvationerna i I, II och III. Då fås nämligen

$$z = \frac{\zeta^n + \xi^n + \eta^n}{2}$$

$$x = \frac{\zeta^n + \xi^n - \eta^n}{2}$$

$$y = \frac{\zeta^n - \xi^n + \eta^n}{2}$$

$$k = \frac{\zeta^n - \xi^n - \eta^n}{2} .$$

k kar vidare faktorn 3. Ty om x ej har faktorn 3, så är:

$$\left(x^{\frac{n-1}{2}}\right)^{3-1} \equiv 1 \pmod 3$$

$$\therefore x^n \equiv x \pmod 3 .$$

Har däremot x faktorn 3, så är äfven

$$x^n \equiv x \pmod 3 .$$

Således är

$$x^n + y^n - z^n \equiv x + y - z \pmod 3 .$$

k har således faktorn 3.

§ 3.

Ekvationen $x^n + y^n = n^n z^n$.

Det återstår nu det fall, då endera kvantiteten x, y eller z har faktorn n. Då undersökningen blir tämligen lika, hvilkendera kvantiteten som har faktorn n, så kan man inskränka sig till att behandla ofvanstående ekvation.

Analogt med föregående undersökning finner man:

$$\left.\begin{aligned} nz - y &= \xi^n \\ (nz)^{n-1} + (nz)^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} &= \xi_1{}^n \\ x &= \xi\xi_1 \end{aligned}\right| \quad . \ . \ . \quad \text{(I)}$$

och

$$\left.\begin{aligned} nz - x &= \eta^n \\ (nz)^{n-1} + (nz)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1} &= \eta_{11}{}^n \\ y &= \eta_1\eta_{11} \end{aligned}\right| \quad . \ . \ . \quad \text{(II)}$$

Vidare har man

$$x^n + y^n - (nz)^n \equiv x + y - nz \pmod{n}$$

$$\because\ x = k_1 n - y$$

Insättes detta värde i ursprungliga ekvationen, så fås:

$$(k_1 n - y)^n + y^n = (nz)^n$$

$$\because\ ny^{n-1}k_1 n - n\frac{(n-1)}{1\cdot 2}y^{n-2}(k_1 n)^2 + \cdots + = (nz)^n$$

Häraf finner man, att $ny^{n-1}k_1 n$ måste hafva faktorn n^3 eller att k_1 måste hafva faktorn n, och att således $x + y$ har faktorn n^2. Insätter man åter i uttrycket $x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1}$, $x = kn^2 - y$, så finner man:

$$x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots + y^{n-1} \equiv \gamma n^2 + ny^{n-1}.$$

Detta uttryck har således faktorn n endast en gång. Häraf följer:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= n^{n-1}\zeta^n \\ x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1} &= n\zeta_1{}^n \\ z &= \frac{x+y}{n\zeta_1} \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

På samma sätt som i § 2 finner man här att

$$\xi_1 \equiv \eta_1 \equiv 1 \pmod{n}$$

och att således

$$\xi_1{}^n - \eta_1{}^n \equiv 0 \pmod{n^2}$$

eller att

$$(nz)^{n-2}(y-x) + \cdots + (nz)^2(y^{n-3} - x^{n-3}) + (nz)(y^{n-2} - x^{n-2}) + y^{n-1} - x^{n-1} \equiv 0 \pmod{n^2}.$$

Men

$$y^{2a} - x^{2a} \equiv 0 \pmod{n^{n-1}}$$

däremot icke $\quad y^{2a+1} - x^{2a+1} \equiv 0 \pmod{n}.$

Häraf följer, att nz har faktorn n. Inför man då kvantiteten k, så får man:

$$\begin{aligned} k &= x + y - nz \\ &= n^{n-1}\zeta^n - nz \\ &= x - \xi^n \\ &= y - \eta^n. \end{aligned}$$

Således har k faktorn $\xi\eta\zeta n$. Kvantiteten k:s förhållande till de öfriga angifves för öfrigt genom ekvationerna:

$$nz = \frac{n^{n-1}\zeta^n + \xi^n + \eta^n}{2}$$

$$x = \frac{n^{n-1}\zeta^n + \xi^n - \eta^n}{2}$$

$$y = \frac{n^{n-1}\zeta^n - \xi^n + \eta^n}{2}$$

$$k = \frac{n^{n-1}\zeta^n - \xi^n - \eta^n}{2}.$$

På samma sätt som i föregående paragraf visas äfven, att k har faktorn 3. — För $n = 2$ äro undersökningarne icke giltiga, ty $x^2 + y^2$ har ej faktorn $x + y$.

§ 4.

Ingress till en undersökning af Lucas. Docent A. Bergers bevis för undersökningens oriktighet.

I Encyclopedie der Mathematischen Wissenschaften påstås att E. Lucas i Nouvelles Annales de Mathématiques för 1878 bevisat, att nödvändiga och tillräckliga villkoret för att ekvationen

$$x^3 + y^3 = Az^3$$

skall hafva heltalssolution i x, y och z, är att

$$Ac^3 = ab(a+b),$$

där a, b och c äro hela tal. I tanke att Fermat vunnit sina resultat genom studiet af 3:dje grads likheter, sökte jag då ingress till ekvationen $x^3 + y^3 = Az^3$. Då $ab(a+b)$ är af 3:dje graden i a:s och b:s gemensamma faktorer, föreföll det mig sannolikt, att Lucas c^3 just vore dessa gemensamma faktorer. Ingress erhölls då genom att sätta

$$a = x_1{}^n$$
$$b = y_1{}^n$$
$$a + b = z_1{}^n,$$

hvarur man vidare under ofvanstående antagande om c^3 erhåller, att nödvändiga och tillräckliga villkoren, för att ekvationen $x_1{}^n + y_1{}^n = z_1{}^n$ har solution är, att ekvationen

$$x^3 + y^3 = (x_1 y_1 z_1)^n z^3$$

har solution. Men har denna solution heltalssolution, så har ekvationen

$$\mu^3 + \nu^3 = (x_1 y_1 z_1)^n$$

rationell solution i μ och ν och vice versa. För denna kurva i μ och ν ville jag då bestämma rangen och satte

$$\mu = u_1 + v_1$$
$$\nu = u_1 - v_1 ,$$

hvarur följde

$$2u_1^3 + 6u_1 v_1^2 = (x_1 y_1 z_1)^n$$

samt vidare

$$u_1 = \frac{1}{X}$$
$$v_1 = \frac{Y}{X},$$

hvarur följde

$$Y^2 = \frac{1}{6}((x_1 y_1 z_1)^n X^3 - 2) .$$

Sedan transformerades denna genom

$$X = 2X_1 \sqrt[3]{(x_1 y_1 z_1)^n}$$
$$\sqrt{3}\, Y = Y_1$$

till

$$Y_1^2 = 4X_1^3 - 1 .$$

Denna kurva är af rangen 1. Då alla transformationerna äro birationella, är således den ursprungliga kurvan af samma rang. Då vidare alla transformationer utom den sista hafva rationella koefficienter, så måste en rationell solution till den första kurvan motsvara rationella värden i X_1 och Y_1 eller med andra ord, om man antager $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ hafva heltalssolution och c^3 representera a:s osh b:s gemensamma faktorer, att det då måste gifvas ett u-värde, sådant att

$$2\sqrt[3]{(x_1 y_1 z_1)^n}\, p\,(u; 0; 1)$$

och

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\, p'(u; 0; 1)$$

samtidigt äro rationella. $p(u)$ är här den af Weierstrass studerade dubbelperiodiska funktionen. För att emellertid undersöka, huruvida ofvanstående antagande om c^3 vore rikligt, anskaffade jag Lucas undersökning, hvilken jag här meddelar:

Man har identiskt

$$[\alpha^3 - \beta^3 + 6\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2]^3 + [\beta^3 - \alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2]^3 =$$
$$= \alpha\beta(\alpha + \beta)[\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2]^3 \cdot 3^3 .$$

Således satisfieras ekvationen

$$x^3 + y^3 = Az^3 ,$$

om man sätter

$$x = \alpha^3 - \beta^3 + 6\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$
$$y = \beta^3 - \alpha^3 + 6\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$
$$z = 3(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$
$$A = \alpha\beta(\alpha + \beta) .$$

Häraf följer, att, om A är af formen $\alpha\beta(\alpha + \beta)$, så har ekvationen solution.

Antag nu, att det gifves tre hela tal $x_0\ y_0\ z_0$, sådana att

$$x_0^3 + y_0^3 = Az_0^3$$

och sätt

$$\alpha = x_0^3$$
$$\beta = y_0^3 ,$$

så fås

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) = A(x_0 y_0 z_0)^3 .$$

Härur erhålles Lucas teorem. Ha nu x_0 och y_0 inga gemensamma faktorer, så ha ej heller α och β några, hvaraf framgår, att c^3 ej behöfver utgöra de gemensamma faktorerna till α och β. — Emellertid är Lucas identitet oriktig. Docent A. Berger har härför gifvit följande eleganta bevis: Sätt

$$\alpha^3 - \beta^3 = A_1$$
$$3\alpha\beta(2\alpha + \beta) = B_1 ,$$

så blir

$$(B_1 + A_1)^3 + (B_1 - A_1)^3 = \alpha\beta(\alpha + \beta)[\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2]^3 3^3 .$$

Här har vänstra membrum faktorn B_1 och således $2\alpha + \beta$, hvaremot högra membrum saknar denna faktor. Identiteten

är således oriktig*. Det återstår således af undersökningen, att man kan gifva problemet $x_1^n + y_1^n = z_1^n$ formen $ab(a + b) = \theta^n$, där a och b ej hafva några gemensamma faktorer**. Denna anmärkning vill jag använda i nästa paragraf.

§ 5.

Ekvationen $\alpha^2 = 1 + 4\beta^n$.

Antager man att ekvationen

$$ab(a + b) = \theta^n,$$

där a och b ej hafva någon gemensam faktor, har solutionen

$$a = x_1^n$$
$$b = y_1^n$$
$$a + b = z_1^n,$$

så har ekvationen

$$\frac{b}{a}\left(1 + \frac{b}{a}\right) = \theta_1^n$$

eller

$$\tau(1 + \tau) = \theta_1^n$$

rationella solutionen

$$\tau = \frac{b}{a} = \frac{y_1^n}{x_1^n}$$

$$\theta_1 = \frac{y_1 z_1}{x_1^3}.$$

* Vid detta tillfälle vill jag anmärka, att Lucas* äfven bevisat, att nödvändiga och tillräckliga villkoret, för att $2^{2^n} + 1 = p$ är primtal, är, att detta tal är faktor i $3^{2^{2^n}} + 1$. Detta är oriktigt, ty om p är primtal ($\neq 3$), så är det faktor i $3^{p-1} - 1$ enligt Fermats sats och således icke i $(3^{p-1} - 1) + 2$ eller i $3^{2^{2^n}} + 1$.

** Legendres påstående att, för att ekvationen $x^3 + y^3 = Az^3$ skall hafva solution, A måste hafva faktorn 2, är således icke visadt vara oriktigt. Detta tror sig nämligen Lucas (l. c.) hafva visat.

* E. Pascal: Repertoirum der höheren Mathematik I Analysis p. 516.

eller, om man i stället för att dividera ekvationen med a^3 dividerar den med b^3,

$$\tau = \frac{a}{b}$$

$$\theta_1 = \frac{x_1 z_1}{y_1^{\,3}}.$$

Omvändt följer, att om ekvationen

$$\tau(1 + \tau) = \theta_1^{\,n}$$

har rationella solutionen

$$\tau = \frac{\mu}{\nu}$$

$$\theta_1 = \frac{\rho}{\nu},$$

där bråken äro förkortade så långt som möjligt, man har

$$\frac{a(a+b)}{b^2} = \frac{\mu^n}{\nu^n}.$$

Här äro båda bråken förkortade så långt som möjligt, ty b och $a + b$ ha inga gemensamma faktorer. Då bli täljarne lika, likaså nämnarne och således

$$a(a + b) = \mu^n$$
$$b^n = \nu^n,$$

samt slutligen a, b och $a + b$ n^{te} digniteter. Häraf följande teorem:

Har ekvationen

$$x_1^{\,n} + y_1^{\,n} = z_1^{\,n}$$

heltalssolution, så har ekvationen

$$\tau(1 + \tau) = \theta^n$$

rationell solution och vice versa.

Denna sista ekvation kan emellertid transformeras genom ekvationerna

$$z = \frac{\alpha - 1}{2}$$

$$\beta = \beta$$

till

$$\alpha^2 = 4\beta^3 + 1 .$$

Nödvändiga och tillräckliga villkoret för att ekvationen

$$x_1^n + y_1^n = z_1^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

har heltalssolution är, att ekvationen

$$\alpha^2 = 4\beta^3 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II})$$

har rationel solution.

Euler* har emellertid visat omöjligheten att satisfiera ekvationen

$$x_1^3 + y_1^3 = z_1^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III})$$

med hela tal. Det är således omöjligt att satisfiera ekvationen

$$\alpha^2 = 4\beta^3 + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{IV})$$

med rationella tal eller, om jag inför

$$u = \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 + 1}}$$

och således

$$\beta = p(u; 0; -1)$$

$$\alpha = -p'(u; 0; -1),$$

att dessa funktioner utom för värdesystemet $(0; \pm 1)$ *samtidigt kunna vara rationella.*

Antager man nu existens af tre hela tal, som satisfiera (III), så gifves det två rationella tal, som satisfiera (IV), och ur dessa, om de betecknas med

* Se Legendre: Zahlentheorie. Deutsch von H. Maser Bd. II, p. 348.

$$p(u_1; 0; -1)$$

och

$$-p'(u_1; 0; -1),$$

under antagande att

$$0 = p(u_2; 0; -1)$$

$$-1 = p'(u_2; 0; -1),$$

medels additionsteoremen för $p(u)$ och $p'(u)$ en ny rationel solution. Denna nya solution motsvarar en ny till (III). Alltså kan man i fallet $n = 3$ ur en solution till (III) städse med hjälp af additionsteoremen för $p(u)$ och $p'(u)$ erhålla en annan. Det frågas då, huruvida man med hjälp af additionsteoremen för Abelska funktionerna kan uppnå samma resultat i afseende på ekvationen (I).

§ 6.

Användning af additionsteoremen för de Abelska funktionerna.

Antag kurvan

$$y^2 = 4x^n + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}.$$

Denna kurva är af rangen $p = \frac{n-1}{2}$ *, och integraler af första slaget äro

$$\int \frac{x^{i-1}\,dx}{\sqrt{4x^n + 1}} = p'_i \left(i = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}\right). **$$

Det Jacobiska omvändningsproblemet blir då, att ur ekvationssystemet ***

* Appell et Goursat: Théorie des Fonctions Algébriques p. 45—46.
** Appell et Goursat: Théorie des Fonctions Algébriques p. 60—64.
*** H. Stahl, Abelsche Functionen p. 193.

$$\left[\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p}\right] du_1 \qquad U_1$$

$$\left[\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p}\right] du_2 \qquad U_2$$

— — — — — — — —

$$\left[\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p}\right] du_p \equiv U_p ,$$

där $a_1, a \cdots a_p$ äro godtyckliga men fixa punkter på Riemanska ytan, och där kongruenstecknen betyda att integrationsvägarne äro desamma i alla ekvationerna, samt där u_i äro normalintegralerna af första slaget,* bestämma x_i såsom funktioner af U_i. Man vet då, att rationella och symetriska funktioner af x_i låta uttrycka sig såsom Abelska funktioner af U_i,** hvilka senare besitta ett algebraiskt additionsteorem. Tänker man sig nu ett annat system af värden x'_i, så gifva dessa medels ekvationssystemet

$$\left[\int_{a_1}^{x'_1} + \int_{a_2}^{x'_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x'_p}\right] du_1 \equiv V_1$$

$$\left[\int_{a_1}^{x'_1} + \int_{a_2}^{x'_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x'_p}\right] du_2 \equiv V_2$$

— — — — — — — — —

$$\left[\int_{a_1}^{x'_1} + \int_{a_2}^{x'_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x'_p}\right] du_p \equiv V_p$$

värdena på samma Abelska funktioner af V_i. Antager man då x_i och x'_i hafva vissa värden och insätter dessa i additionteoremen för dessa funktioner, så gifva de värdena på samma Abelska

* Appell et Goursat p. 148—154.

** Stahl p. 306—307.

funktioner för argumentvärdena $U_i + V_i = W_i$. Det gäller då att med hjälp af dessa värden bestämma andra punkter på Riemanska ytan. Man erhåller dessa nya punkter x_i'' ur ekvationssystemet:

$$\left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_1 = W_1$$

$$\left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_2 = W_2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_p \equiv W_p,$$

hvilket är detsamma, som att, tack vare likheterna

$$U_i + V_i = W_i,$$

bestämma x_i'' ur ekvationssystemet

$$\left[\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p}\right] du_1 + \left[\int_{a_1}^{x_1'} + \int_{a_2}^{x_2'} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p'}\right] du_1 \equiv \left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_1$$

$$\left[\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p}\right] du_2 + \left[\int_{a_1}^{x_1'} + \int_{a_2}^{x_2'} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p'}\right] du_2 \quad \left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2'} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_2$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_p + \left[\int_{a_1}^{x_1'} + \int_{a_2}^{x_2'} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p'}\right] du_p \equiv \left[\int_{a_1}^{x_1''} + \int_{a_2}^{x_2''} + \cdots + \int_{a_p}^{x_p''}\right] du_p.$$

Detta ekvationssystem låter emellertid lösa sig med hjälp af omvändningen af det Abelska teoremet*. Flyttar man nämligen öfver alla integralerna till venstra membrum, så existerar enligt detta teorem en rationel funktion med enkla nollställen i $a_1, a_2, \cdots a_p, x_1'', x_2'', \cdots x_p''$, och enkla oändlighetsställen i $x_1, x_2, \cdots x_p, x_1', x_2', \cdots x_p'$. Denna funktion är fullt bestämd af alla oändlighetsställena och nollställena a_1, $a_2, \cdots a_p$, hvadan man genom elimination mellan denna funktion och den ursprungliga kurvan erhåller $x_1'', x_2'', \cdots x_p''$. Då hvarje rationel funktion af x och y är af formen

$$\frac{P(x) + y\,Q(x)}{R(x)},$$

där P, Q och R äro polynom i x, ligger svårigheten väsentligen i att erhålla lämpliga värden på a_i, x_i och x_i'. Denna svårighet skulle möjligen kunna lösas genom att betrakta fallet $n = 5$. Här vill jag ett ögonblick betrakta fallet $n = 3$.

Låt fig. 1 föreställa kurvan

$$y^2 = 4x^3 + 1, \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

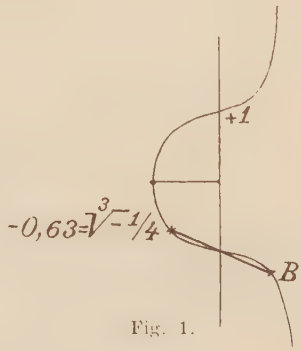


Fig. 1.

* H. Stahl: Abelsche Functionen, p. 151—153.

så erhålles den i § 5 omnämda solutionen, under antagande att punkten A har rationella koordinaterna, x_1, y_1, genom att eliminera x och y mellan ekvation (I) och

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 1, & x_1, & -y_1, \\ 1, & x, & y \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots \ldots \quad \text{(II)}$$

ty additionsteoremet för $p(u)$ kan, om

$$u + v + w = 0,$$

skrifvas*

$$\begin{vmatrix} 1, p(u), p'(u) \\ 1, p(v), p'(v) \\ 1, p(w), p'(w) \end{vmatrix} = 0,$$

eller, då i detta fall

$$\begin{aligned} p(u) &= 0 \\ p'(u) &= -1 \\ p(v) &= x_1 \\ p'(v) &= -y_1 \\ p(w) &= p(u+v) \quad = +x \\ p'(w) &= -p'(u+v) = y, \end{aligned}$$

på formen II. Ekvationen II representerar en rät linje, gående genom punkterna $(x_1, -y_1)$ och $(0, -1)$. Den sökta punkten blir således punkten B fig. 1. Ur koordinaterna för B erhålles omvändt koordinaterna för A.

I Mathematische Werke von Karl Weierstrars, Bd. I, p. 356 påstås, att teorien för hyperelliptiska funktioner skall utkomma i omarbetad form. Det skulle vara intressant att med hjälp af denna nya teori undersöka frågan $n = 5$.

* Se H. Burkhardt: Elliptische Funktionen, p. 62.

§ 7.

Kurvan $y^n = 1 - x^n$.

Om jag har tre heltal a, b och c så beskaffade, att

$$a^n + b^n = c^n, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{I})$$

så ligga på kurvan

$$y^n + x^n = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\mathrm{II})$$

rationella punkterna

$$x = \frac{b}{c}$$

$$y = \frac{a}{c},$$

och

$$x = \frac{a}{c}$$

$$y = \frac{b}{c},$$

och omvändt. Skär jag då upp x planet från $\sqrt[n]{1}$ till ∞, så är

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}},$$

där $\sqrt[n]{1 - x^n}$ är reell för x reell positiv och mindre än 1, en entydig funktion af x. Denna ger då

$$x = \varphi(u)$$
$$y = \varphi'(u)$$

och man har, under förutsättning att ekv. I ej har solution, följande sats:

Det gifves intet argumentvärde u sådant att $\varphi(u)$ och $\varphi'(u)$ samtidigt äro rationella. $(n > 2)$.

För $n = 1$ och 2 får man hela rationella funktioner af e^u, för $n = 3$, en elliptisk funktion.

Söker man nu rita de kurvor, som erhålles för reella u-värden, så kan man förfara på följande sätt: Man ritar först kurvan

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{1 - x^n}},$$

och sedan med hjälp af integraf kurvan

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}.$$

Vrider man nu axlarne vinkeln $\frac{\pi}{2}$ och speglar den erhållna kurvan i x-axeln, så fås kurvan

$$x = \varphi(u).$$

Meddels integraf erhåller man sedan kurvan

$$y = \varphi'(u).$$

Är $\varphi(u)$ jämn funktion af u, så behöfves ingen spegling. Hade man i stället för kurvan II användt kurvan

$$\alpha^2 = 4\beta^n + 1$$

och betraktat fullet $n = 3$, så hade man erhållit en periodisk kurva*.

I detta sammanhang vill jag äfven påpeka, att rangen af kurvan II är

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$$ **,

* Anm.: Det skulle vara intressant att använda detta förfaringssätt vid exempelvis pendelrörelsen. Periodiciteten hos den nya kurvan skulle man genast se.

** Appell et Goursat: Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrals. P. 239—240.

samt att integraler af formen

$$\int \frac{x^i\,dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} \qquad \text{(i helt positivt tal eller 0)}$$

äro af 3:dje slaget.

Man kan äfven bilda en funktion med egenskaper motsvarande dem, som tillkomma e^x. *Funklionen*

$$\sqrt[n]{1+x^n} - x$$

blir nämligen aldrig noll eller oändlig, är irrationell för rationella x-värden, samt har, om den är rationell, irrationellt argumentvärde. För $x = 0$ *är funktionen* 1, *hvadan dessa värden måste undantagas.*

§ 8.

Sammanställning af några de de föregående resultaten.

Ekvationen $(1+x)^n - 1 - x^n = 0$.

För att nu finna, hvilka af resultaten i § 3 som förut äro kända, sammanställer jag dem här. Antager man då, att i ekvationen

$$x^n + y^n = z^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

x, y och z icke hafva några gemensamma faktorer, och att ingendera har faktorn n, så har man:

$$\left.\begin{array}{llll} x+y=\zeta^n & x^{n-1} - xy^{n-2} + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1} = \zeta_1{}^n \\ z-y=\xi^n & z^{n-1} + zy^{n-2} + \cdots + zy^{n-2} + y^{n-1} = \xi_1{}^n \\ z-x=\eta^n & z^{n-1} + zy^{n-2} + \cdots + zx^{n-2} + y^{n-1} = \eta_1{}^n \end{array}\right\} \text{(II)}$$

$$x+y-z = x-\xi^n = y-\eta^n = \zeta^n - z = k = \xi\eta\zeta n^2 k_1 = \frac{\zeta^n - \xi^n - \eta^n}{2} \quad \text{(III)}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{\zeta^n + \xi^n + \eta^n}{2} \\ x &= \frac{\zeta^n + \xi^n - \eta^n}{2} \\ y &= \frac{\zeta^n - \xi^n - \eta^n}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Hilbert angifver i Jahresbericht der Deutschen Mathematicher Vereiningung, Vierter Band 1894—1895, p. 517 förut gjorda undersökningar öfver ekvationen (I), och Legendre* har sammanfattat i tredje upplagan af sin talteori alla, af honom kända, undersökningar. Abel har funnit ekvationen (IV), Lamé** ekvationen III, dock icke kongruensen modulo n^2. Till Lamé's afhandling har Cauchy fogat en not, hvari han undersöker högra membrum i ekvationen:

$$(x + y)^n - z^n = (x + y)^n - x^n - y^n$$

Denna ekvation visar, att detta membrum kar faktorn k. I fallen $n = 3$, 5 och 7 har man:

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$$
$$(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2.$$

Cauchy visar nu, att för primtalsvärden på n, större än 3, uttrycket

$$(x + y)^n - x^n - y^n \quad \ldots\ldots\ldots \text{(V)}$$

alltid har faktorn

$$x^2 + xy + y^2,$$

och, då

$$n \quad 1 \quad (3),$$

* Zahlentheorie. Deutsch von H. Maser. Leipzig 1893.

** Lamé: Mémoire d'anlyse indéterminée demontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ etc. Journal de Matéhmatique 1840.

kvadraten på densamma. Då emellertid uttrycket (V) är kongruent med noll modulo n^3*, så måste man känna dess faktorer för att finna dem, som hafva faktorn n. Fördenskull måste man känna rötterna till ekvationen

$$(z+1)^n - 1 - z^n = P(z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}$$

Denna ekvation är, frånsedt roten 0, reciprok, ty identiskt är:

$$(z+1)^n - 1 - z^n = \left(\left(1+\frac{1}{z}\right)^n - 1 - \frac{1}{z^n}\right) \cdot z^n$$

Häraf följer, att den, om den har roten $\alpha \neq 0$, äfven har roten $\frac{1}{\alpha}$. Emedan vidare, för z reell och positiv,

$$(z+1)^n > 1 + z^n,$$

så finnes ingen reell positiv rot. Sätter man nu

$$\left.\begin{aligned} z+1 &= z_1 \\ z_1{}^n - 1 - (z_1-1)^n &= P_1(z_1) \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII)}$$

så är för negativa z_1,

$$-(z_1-1)^n > z_1{}^n - 1,$$

och således $P_1(z_1) > 0$. Ekvationen VI har således ingen reell, negativ rot mindre än -1. Emedan den är reciprok, kan den därför ej heller hafva någon reell rot mellan 0 och -1. Som man genast ser, äro då 0 och -1 de enda reella rötterna. Sätter man nu

$$\left.\begin{aligned} z+\frac{1}{2} &= z_{\prime\prime} \\ \left(z_{\prime\prime}+\frac{1}{2}\right)^n - \left(z_{\prime\prime}-\frac{1}{2}\right)^n - 1 &= P_{\prime\prime}(z_{\prime\prime}) \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}$$

* Anm. $x + y \equiv z \pmod{n^2}$

$\therefore (x+y)^n \equiv z^n \pmod{n^3}$.

så ser man, att $P_n(z_n)$ endast innehåller jämna digniteter i z_n, och att $P_n(z_n)$ för reella z_n, hvilkas absoluta belopp är mindre än $\frac{1}{2}$, är negativ. Emedan nu för godtyckliga z_n

$$\left|\left(z_n+\frac{1}{2}\right)^n-\left(z_n-\frac{1}{2}\right)^n\right|<2\left(n\frac{1}{2}|z_n|^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^3|z_n|^{n-3}+\cdots+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}|z_n|^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right),$$

så är för

$$|z_n|<\frac{1}{2}$$

$$1>\left|\left(z_n+\frac{1}{2}\right)^n-\left(z_n-\frac{1}{2}\right)^n\right|,$$

hvaraf följer, at funktionen

$$\frac{d}{dz_n}\log P_n(z_n)$$

är regulär inom en cirkel, omkring $z_n=0$, med radien $\frac{1}{2}$. Häraf framgår, att ekvationen VI icke har någon rot inom cirkeln A fig. 2. Emedan ekvationen VI är reciprok, har

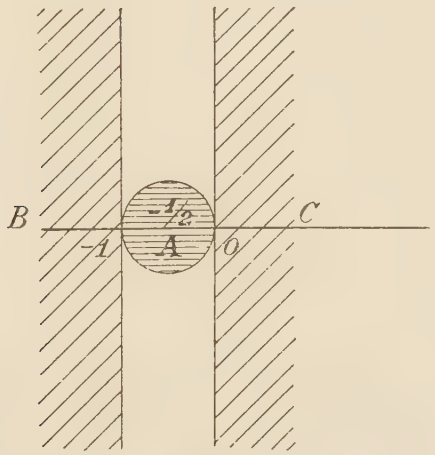


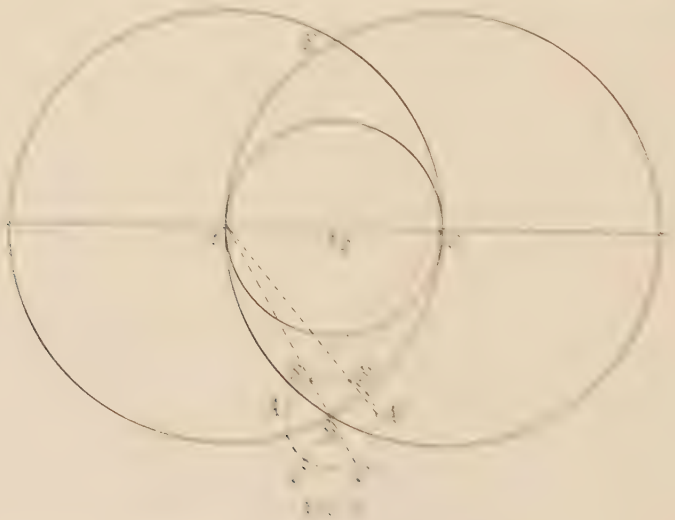
Fig 2.

den således ingen rot i det reciproka området till A eller i B. Men ekvationen $P_1(z_1)$ är också reciprok, ty man har

$$z_1^n - 1 = (z_1 - 1)^n \cdot z_1^n \left(\frac{1}{z_1^n} + 1 - \left(1 - \frac{1}{z_1}\right)^n \right) =$$

$$= -z_1^n \left(\left(\frac{1}{z_1}\right)^n - 1 - \left(\frac{1}{z_1} - 1\right)^n \right).$$

Följaktligen finnes ingen rot inom C. Emedan vidare $P_1(z_1)$ endast har jämna dignitéter i z_1, så svarar mot en rot α alltid en rot $-\alpha$, hvaraf följer, att rötterna ligga symetriskt kring $z = -\frac{1}{2}$. Då vidare ekvationens imaginära rötter äro



konjugerade, så måste, om B i fig. 3 är rot, äfven A, C, C_1, A_1, B_1 ligga på en cirkel D. Emedan vidare $A0 \times B0 = 1$, är denna cirkel ortogonal till cirkeln 0, och, som man på samma sätt finner, till cirkeln -1. Vid alla speglingar i cirklarne 0 och -1 öfvergår D i sig själt, hvadan alla rötter med negativ imaginär del, som erhållas ur B, ligga på denna cirkel.

Huruvida C är A:s spegelbild, kan man möjligen afgöra med hjälp af PASCALS teorem *.

Utför jag en transformation med reciproka radier och centrum i E, så bli cirklarne 0 och -1 räta linjer, och cirklarne D få alla sitt centrum i dessa linjers skärningspunkt.

§ 9.

Sammanhang med teorien för polygonaltalen.

För att studera kurvan

$$z^2 = 4\xi^4 + 1$$

på sätt, som är omförmäldt i § 6, måste man känna teorien för ϑ-funktioner af 2 variabler. I Mémoire Sav. étrang. Bd. 11 1851 har ROSENHAIN i en afhandling** studerat dessa. Han skrifver där sid. 371. "C'est de la forme (U) des fonctions $\vartheta_r(v)$ que M. JACOBI déduit les formules curieuses dont il s'agit, au myoen du théorème algébrique très,simple, que les equations

$$(13)\quad \begin{cases} 2v_1 = v + v' + v'' + v''' \\ 2v_1' = v + v' - v'' - v''' \\ 2v_1'' = v - v' + v'' - v''' \\ 2v_1''' = v - v' - v'' + v''' \end{cases}$$

donnent

$$(14)\quad v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = v_1^2 + v_1'^2 + v_1''^2 + v_1'''^2 ."$$

* BJÖRLING: Nyare Plan Geomeri p. 139.

** Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des integrales ultraelliptiques de la première classe.

Använder man detta teorem på ekvationerna

$$\left|\begin{array}{l} 2z = \zeta^n + \xi^n + \eta^n \\ 2x = \zeta^n + \xi^n - \eta^n \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{l} 2y = \zeta^n - \xi^n + \eta^n \\ 2k = \zeta^n - \xi^n - \eta^n , \end{array}\right|$$

så får man, om man inför beteckningen a:

$$\left|\begin{array}{l} a = \zeta^{2n} + \xi^{2n} + \eta^{2n} \\ 2z = \zeta^n + \xi^n + \eta^n \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

och

$$\left|\begin{array}{l} a = z^2 + x^2 + y^2 + k^2 \\ 2\zeta = z + x + y + k \end{array}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Betraktar man nu i I a och $2z$ som bekanta, samt i II a och $2\zeta^n$ som bekanta, så får man tvänne problem, hvilka Legendre* behandlar i § 1 af 6:te hufvuddelen af sin talteori, och hvarom han skrifver (p. 332): "Die in Diesem Paragraphen (§ 1) entwickelte Theorie bildet die Grundlage für den *allgemeinen Beweis des Fermatschen Satzes* mit dem wir uns im folgenden Paragraphen beschäftigen werden." Denna Fermat'ska sats är satsen om polygonaltalen. Man vinner här icke allenast storleksuppskattningar utan äfven talformer, hvilka möjligen, kombinerade med Eulers sats** om primfaktorerna till tal af formen

$$a^n + b^n ,$$

kunna lämna bevis för omöjligheten att satisfiera diophantiska ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

med hela tal.

* Zahlentheorie. Deutsch von H. Maser. Leipzig 1893.

** Zahlentheorie. Deutsch von H. Maser. Leipzig 1893. Bd 1, p. 222.

Innehåll.

Inledning 3

§ 1. Ekvationen $x^4 + 4y^4 = z^2$ 5

§ 2. Ekvationen $x^n + y^n = z^n$ 9

§ 3. Ekvationen $x^n + y^n = n^n z^n$ 13

§ 4. Ingress till en undersökning af Lucas. Docent A. Berger's bevis för undersökningens oriktighet 15

§ 5. Kurvan $x^2 = 1 + 4\beta^n$ 18

§ 6. Användning af additionsteoremen för de Abelska funktionerna 21

§ 7. Kurvan $y^n = 1 - x^n$ 26

§ 8. Sammanställning af några af de föregående resultaten. Ekvationen $(1 + x)^n - 1 - x^n = 0$ 28

§ 9. Sammanhang med teorien för polygonaltalen 33